

Aula 13: Exercícios de indução

Prof.: Paulo Roberto Nunes de Souza

7 Exercícios

7.1. Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

- a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
- b) $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$
- c) $1 + 3 + 6 + \cdots + n(n+1)/2 = n(n+1)(n+2)/6$
- d) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$
- e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n(2n-1)(2n+1)/3$
- f) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$
- g) $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \cdots + 1/(n(n+1)) = n/(n+1)$
- h) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
- i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- j) $9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^{n-1} = 10^n - 1$

7.2. Prove por indução que:

- a) $n < 2^n$, para $n \in \mathbb{N}$
- b) $2^n < n!$, para $n > 3$
- c) $n^2 > n + 1$, para $n > 1$
- d) $n^2 > 5n + 10$, para $n > 6$
- e) $2^{n+1} < 3^n$, para $n > 1$
- f) $n! > n^2$, para $n > 4$
- g) $2^n \geq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$, para $n \geq 1$
- h) $1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n \leq 1 + n/2$, para $n \geq 1$

7.3. Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

- a) $2^{3n} - 1$ é divisível por 7
- b) $2^n + (-1)^{n+1}$ é divisível por 3
- c) $2^{2n} - 1$ é divisível por 3
- d) $7^n - 2^n$ é divisível por 5