COM10080 - Lógica Computacional 2	04/12/2012
Aula 3: Sintaxe na Lógica de Predicados	
Prof.: Paulo Roberto Nunes de Souza	

2 Sintaxe na Lógica de Predicados

A Lógica de Predicados é mais rica que a Lógica Proposicional pois além de conter os objetos desta, a Lógica de Predicados contém quantificadores, símbolos funcionais e de predicados. Neste sentido, a Lógica de Predicados é uma extensão da Lógica Proposicional, o que lhe confere um maior poder de representação. Existem, por exemplo, vários tipos de inferências, que não possuem representações adequadas na Lógica Proposicional mas podem ser representadas na Lógica de Predicados. Por exemplo:

- Todo aluno de Computação é inteligente. Luciano é aluno de Computação. Logo, Luciano é inteligente.
- A adição de dois números ímpares quaisquer é um número par.

O pondo determinante nas sentenças apresentadas para demandar a Lógica de Predicados são as palavras: "todo"e qualquer". Com essas palavras as sentenças não estão se referindo a um objeto específico mas a todo um conjunto de elementos.

O conjunto de símbolos que formam o **alfabeto** da linguagem da Lógica de Predicados está definido a seguir.

Definição 6. Alfabeto. *O alfabeto da Lógica de Predicados é constituído por:*

- *Símbolos de pontuação: (,) .*
- *Símbolos de verdade: $false$.*
- *Um conjunto enumerável de símbolos para variáveis: $x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, \ldots$.*
- *Um conjunto enumerável de símbolos para funções: $f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, \ldots$.*
- *Um conjunto enumerável de símbolos para predicados: $p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, \ldots$.*
- *Conectivos: $\neg, \vee, \forall, \exists$.*
- *Um conjunto enumerável de símbolos para funções zero-árias: $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$.*
- *Um conjunto enumerável de símbolos para predicados zero-ários: $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, P_2, \ldots$.*

  Associado a cada símbolo para função ou predicado, tem-se um número inteiro não-negativo k. Este número indica a aridade ou número de argumentos da função ou predicado.

O conjunto de conectivos utilizado no alfabeto compoem representação simplificada da Lógica de Predicados, já que com estes conectivos é possível gerar os demais conectivos. Da mesma forma, o símbolo de ferdade $true$ pode ser definido a partir do $false$ pois

$$true = \neg false$$

.

Definição 7. Termo. *Os termos da Lógica de Predicados são construídos a partir das regras a seguir.*

- *As variáveis são termos.*

- *Se* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *são termos e* f *é um símbolo para função n-ária, então* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *é um termo.*

Exemplo:
Termos bem formadas
x
a
$f(x)$
$f(x, a)$
$f(x, y, z)$
$g(y, f(x, a))$

$\boxtimes$

Definição 8. Átomo. *Os átomos da Lógica de Predicados são construídos a partir das regras a seguir.*

- *O símbolo de verdade* $false$ *é um átomo.*
- *Se* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *são termos e* p *é um símbolo para predicado n-ário, então* $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *é um átomo.*

Utilizando um abuso de linguagem, considera-se que *true* é um átomo.
Exemplo:
Átomos bem formados
$false$
P
$p(x)$
$p(x, a)$
$q(x, y, z)$
$p(y, f(x, a))$

$\boxtimes$

Definição 9. Fórmula. *As fórmulas da Lógica de Predicados são construídos a partir das regras a seguir.*

- *Todo átomo é uma fórmula.*
- *Se* H *é uma fórmula, então* $(\neg H)$ *é uma fórmula.*
- *Se* h *e* g *são fórmulas, então* $(H \vee G)$ *é uma fórmula.*
- *Se* H *é uma fórmula e* x *uma variável, então* $((\forall x)H)$ *e* $((\exists x)H)$ *são fórmulas.*

Como o conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$ é completo, então é possível obter fórmulas com os conectivos

$$\wedge, \rightarrow e \leftrightarrow .$$

Exemplo:
Fórmulas bem formadas
$false$
P
$p(x)$
$((\neg p(x) \vee R))$
$(p(x) \rightarrow R)$
$((\forall x)(p(x) \rightarrow R))$

$\boxtimes$

Definição 10. Expressão. *Uma expressão da Lógica de Predicados é um termo ou uma fórmula.*

Na Lógica de Predicados contatenações de símbolos do alfabeto são consideradas válidas se, e somente se, esta form uma expressão.

Definição 11. Gramática. *A gramática da Lógica de Predicados como definida previamente é a seguinte.*

$$
\begin{array}{rcl}
TERMO & = & \breve{x} \\
 & | & \breve{f}(TERMO, TERMO, \ldots, TERMO) \\
 & & \\
ATOMO & = & false \\
 & | & \breve{p}(TERMO, TERMO, \ldots, TERMO) \\
 & & \\
FORMULA & = & ATOMO \\
 & | & \neg FORMULA \\
 & | & FORMULA \vee FORMULA \\
 & | & ((\forall \breve{x}) FORMULA) \\
 & | & ((\exists \breve{x}) FORMULA) \\
 & & \\
EXPRESSAO & = & TERMO \\
 & | & FORMULA
\end{array}
$$

A escrita de alguns parênteses pode ser suprimida, caso isto não gere ambiguidade na fórmula. Para permitir uma maior eliminação de símbolos de pontuação sem gerar ambiguidade é definida uma ordem de precedência dos conectivos.

Definição 12. Ordem de precedência. *Na Lógica de Predicados, a ordem de precedência dos conectivos é definida por:*

- *maior precedência:* $\neg$.
- *precedência intermediária superior:* $\forall, \exists$.
- *precedência intermediária inferior:* $\wedge, \vee$.
- *menor precedência:* $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Para possibilitar provas por indução matemática na Lógica Proposicional é necessária a criação de mais alguns conceitos.

Definição 13. Comprimento de uma fórmula. *Se H e G são fórmulas da Lógica Proposicional, o comprimento de uma fórmula é definido como se segue.*

- *Se H é um símbolo proposicional ou de verdade então $comp[H] = 1$.*
- $comp[\neg H] = comp[H] + 1$
- $comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$
- $comp[H \wedge G] = comp[H] + comp[G] + 1$
- $comp[H \rightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$

- $comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$

Definição 14. subfórmula. *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Uma subfórmula de H é definida por:*

- *H é uma subfórmula de H.*
- *Se $H = (\neg G)$, então G é uma subfórmula de H.*
- *Se H é uma fórmula do tipo: $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H.*
- *Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.*