

Aula 02: Operações lógicas sobre proposições

Prof.: Paulo Roberto Nunes de Souza

4 Operações lógicas sobre Proposições

Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas **operações lógicas**. Estas obedecem a regras de cálculo, denominado **cálculo proposicional**, semelhante ao da aritmética sobre números.

4.1 Negação (\sim)

Definição 6. Chama-se **negação de uma proposição p** a proposição representada por “não p ”, cujo **valor lógico é a verdade (V)** quando p é falsa e a **falsidade (F)** quando p é verdadeira.

Assim, “não p ” tem o valor lógico oposto daquele de p .

Simbolicamente, a **negação de p** indica-se com a notação “ $\sim p$ ”, que se lê: “não p ”.

O valor lógico da negação de uma proposição é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$\sim V = F, \quad \sim F = V$$

Exemplo:

4.1. $p : 2 + 3 = 5(V)$

$\sim p : 2 + 3 \neq 5(F)$

4.2. $q : 7 < 3(F)$

$\sim q : 7 \geq 3(V)$

4.3. $r : \text{Roma é a capital da França (F)}$

$\sim r : \text{Roma não é a capital da França (V)}$



4.2 Conjunção (\wedge)

Definição 7. Chama-se **conjunção de duas proposições p e q** a proposição representada por “ p e q ”, cujo **valor lógico é a verdade (V)** quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a **falsidade (F)** nos demais casos.

Simbolicamente, a **conjunção de duas proposições p e q** indica-se com a notação “ $p \wedge q$ ”, que se lê: “ p e q ”.

O valor lógico da conjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:
ou seja, pelas igualdades:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$$V \wedge V = V, \quad V \wedge F = F, \quad F \wedge V = F, \quad F \wedge F = F$$

Exemplo:

$$4.1. \quad \begin{cases} p : & \text{A neve é branca (V)} \\ q : & 2 < 5 \text{ (V)} \end{cases} \\ p \wedge q : \text{A neve é branca e } 2 < 5 \text{ (V)}$$

$$4.2. \quad \begin{cases} p : & \pi > 4 \text{ (F)} \\ q : & 7 \text{ é um número primo (V)} \end{cases} \\ p \wedge q : \pi > 4 \text{ e } 7 \text{ é um número primo (F)}$$

⊠

4.3 Disjunção (\vee)

Definição 8. Chama-se **disjunção de duas proposições p e q** a proposição representada por “ p ou q ”, cujo **valor lógico** é a **verdade(V)** quando ao menos uma das proposições p e q são é verdadeira e a **falsidade(F)** quando as proposições p e q são ambas falsas.

Simbolicamente, a **disjunção de duas proposições p e q** indica-se com a notação “ $p \vee q$ ”, que se lê: “ p ou q ”.

O valor lógico da disjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

$$V \vee V = V, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F$$

Exemplo:

$$4.1. \quad \begin{cases} p : & \text{Paris é a capital da França (V)} \\ q : & 9 - 4 = 5 \text{ (V)} \end{cases} \\ p \vee q : \text{Paris é a capital da França ou } 9 - 4 = 5 \text{ (V)}$$

$$4.2. \quad \begin{cases} p : & \pi = 4 \text{ (F)} \\ q : & \sqrt{-1} = 1 \text{ (F)} \end{cases} \\ p \vee q : \pi = 4 \text{ ou } \sqrt{-1} = 1 \text{ (F)}$$

⊠

4.4 Disjunção Exclusiva (\vee)

Definição 9. Chama-se *disjunção exclusiva de duas proposições p e q* a proposição representada por “ou p ou q ”, cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando quando p e q são ambas verdadeiras, e a **falsidade**(F) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Simbolicamente, a **disjunção de duas proposições p e q** indica-se com a notação “ $p \vee q$ ”, que se lê: “ou p ou q ”.

O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

$$V \vee V = F, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F$$

4.5 Condicional (\rightarrow)

Definição 10. Chama-se *proposição condicional ou apenas condicional* uma proposição representada por “se p então q ”, cujo **valor lógico** é a **falsidade**(F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a **verdade**(V) nos demais casos.

Simbolicamente, a **condicional de duas proposições p e q** indica-se com a notação “ $p \rightarrow q$ ”, que se lê: “se p então q ”, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

4.1. p é a condição suficiente para q

4.2. q é a condição necessária para p

Na condicional “ $p \rightarrow q$ ”, diz-se que p é o antecedente e q o conseqüente.

O valor lógico da condicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$V \rightarrow V = V, \quad V \rightarrow F = F, \quad F \rightarrow V = V, \quad F \rightarrow F = V$$

4.6 Bicondicional (\leftrightarrow)

Definição 11. Chama-se *proposição bicondicional ou apenas bicondicional* uma proposição representada por “ p se e somente se q ”, cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a **falsidade**(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a **bicondicional de duas proposições p e q** indica-se com a notação “ $p \leftrightarrow q$ ”, que se lê: “p se e somente se q”, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

4.1. p é a condição necessária e suficiente para q

4.2. q é a condição necessária e suficiente para p

O valor lógico da bicondicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$V \leftrightarrow V = V, \quad V \leftrightarrow F = F, \quad F \leftrightarrow V = F, \quad F \leftrightarrow F = V$$

4.7 Exercícios

- 4.1. Maria tem três carros: um Gol, um Corsa e um Fiesta. Um dos carros é branco, o outro é preto e o outro é azul. Sabe-se que: ou o Gol é branco, ou o Fiesta é branco; ou o Fiesta é azul, ou o Corsa é azul; ou o Corsa é preto, ou o Fiesta é preto; ou o Gol é branco, ou o Corsa é azul. Portanto, qual é a cor de cada carro?
- 4.2. Em uma empresa, o cargo de chefia só pode ser preenchido por uma pessoa que seja pós-graduada em administração de empresas. José ocupa um cargo de chefia, mas João não. Partindo desse princípio, o que podemos afirmar?
- 4.3. Numa ilha há apenas dois tipos de pessoas: as que sempre falam a verdade e as que sempre mentem. Um explorador contrata um ilhéu chamado X para servir-lhe de intérprete. Ambos encontram outro ilhéu, chamado Y, e o explorador lhe pergunta se ele fala a verdade. Ele responde na sua língua e o intérprete diz: “Ele disse que sim, mas ele pertence ao grupo dos mentirosos”. O que podemos concluir sobre os ilhéus?