

Aula 15: Exercícios de recursão e indução

Prof.: Paulo Roberto Nunes de Souza

9 Exercícios

9.1. Calcule o valor das funções a seguir:

a) $f(3), f(4)$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 + f(n-1) & , \text{ se } n \text{ é par} \\ 1 + f(n-1) & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

b) $f(25)$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n = 0 \\ f(\lfloor n/2 \rfloor) + n & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

c) $f(5)$

$$f(n) = \begin{cases} 3 & , \text{ se } n = 1 \\ 5 & , \text{ se } n = 2 \\ (n-1)f(n-1) + (n-2)f(n-2) & , \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

Resposta: The correct answer goes here.9.2. Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

b) $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

c) $1 + 3 + 6 + \cdots + n(n+1)/2 = n(n+1)(n+2)/6$

d) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n(2n-1)(2n+1)/3$

f) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$

g) $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \cdots + 1/(n(n+1)) = n/(n+1)$

h) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n \cdot n! = (n-1)! - 1$

i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Resposta: The correct answer goes here.

9.3. Prove por indução que:

a) $n^2 > n + 1$, para $n > 1$

b) $n^2 > 5n + 10$, para $n > 6$

c) $2^{n+1} < 3^n$, para $n > 1$

d) $n! > n^2$, para $n > 4$

Resposta: The correct answer goes here.

9.4. Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

- a) $2^{3n} - 1$ é divisível por 7
- b) $2^n + (-1)^{n+1}$ é divisível por 3
- c) $2^{2n} - 1$ é divisível por 3
- d) $7^n - 2^n$ é divisível por 5

Resposta: The correct answer goes here.